TÍNH TẮT DẦN MŨ CỦA NGHIỆM YẾU BÀI TOÁN DIRICHLET CHO PHƯƠNG TRÌNH KIRCHHOFF PHI TUYẾN TRONG MIỀN HÌNH VÀNH KHĂN

Lê Hữu Kỳ Sơn[1*], Đoàn Thị Như Quỳnh[1], Lê Thị Mai Thanh[2]

[1]*Trường Đại học Công nghiệp Thực phẩm TP.HCM*

[2]*Trường Đại học Nguyễn Tất Thành*

[*]Email: *sonlhk@hufi.edu.vn*

Ngày nhận bài: 15/6/2022; Ngày chấp nhận đăng: 15/7/2022

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi xem xét một phương trình sóng Kirchhoff phi tuyến trong hình vành khăn liên kết với điều kiện biên Dirichlet. Dưới một số điều kiện phù hợp, chứng minh rằng nghiệm yếu toàn cục sẽ tắt dần mũ khi $t \to +\infty$ nhờ vào việc thiết lập phiếm hàm Lyapunov phù hợp.

Từ khóa: Phương trình sóng Kirchhoff phi tuyến, Tắt dần mũ.

1. MỞ ĐẦU

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu tính tắt dần mũ của nghiệm yếu bài toán Dirichlet cho phương trình Kirchhoff phi tuyến trong miền hình vành khăn sau

$$\begin{cases} u_{tt} - \left(1 + \int_\rho^1 x u_x^2(x,t)\,dx\right)\left(u_{xx} + \dfrac{1}{x}u_x\right) + \lambda u_t = u^3 + f(x,t), \rho < x < 1, t > 0 \\ u(\rho,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

Trong đó f, u_0, u_1 là các hàm cho trước, ρ, λ là các hằng số dương cho trước, với $0 < \rho < 1$.

Phương trình (1.1) là phương trình sóng phi tuyến hai chiều mô tả dao động phi tuyến của màng hình vành khăn $\Omega_1 = \{(x,y) : \rho^2 < x^2 + y^2 < 1\}$. Trong quá trình dao động, diện tích của màng và lực căng tại các điểm trên đó thay đổi theo thời gian. Điều kiện trên biên $\Gamma_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ và $\Gamma_\rho = \{(x,y) : x^2 + y^2 = \rho^2\}$ đòi hỏi $u(\rho,t) = u(1,t) = 0$, có nghĩa là hai đường biên của màng được giữ cố định.

Phương trình (1.1) thuộc dạng Kirchhoff đã nhận được nhiều sự chú ý. Vào năm 1876, Kirchhoff [1] đã khảo sát dao động ngang nhỏ của một sợi dây đàn hồi có độ dài L, khi giả sử lực căng tại mỗi điểm của sợi dây, chỉ có thành phần theo chiều dọc, có mô hình toán học

$$\rho h u_{tt} = \left(P_0 + \frac{Eh}{2L}\int_0^L u_x^2(y,t)\,dy\right)u_{xx}, \tag{1.2}$$

với *u(x,t)* mô tả sự dịch chuyển ngang tại vị trí *x* ở thời điểm *t*, và ρ là khối lượng riêng của vật liệu cấu tạo nên sợi dây, h là thiết diện sợi dây, L là chiều dài sợi dây, E là modulus Young của sợi dây, P_0 là lực căng dây tại thời điểm ban đầu.

Việc nghiên cứu sự tồn tại và các tính chất nghiệm của phương trình sóng nói chung và phương trình sóng phi tuyến có dạng Kirchhoff-Carrier nói riêng nhận được nhiều sự quan tâm.

Zhang và cộng sự đã khảo sát bài toán [2]

$$u_{tt}+u_t+u_{xxxx}-M\left(\|u_x\|^2\right)u_{xx}=0, 0<x<L, t>0,$$

với điều kiện biên động

$$\begin{cases} u(0,t)=u_{xx}(0,t), t>0 \\ u_{xx}(L,t)+u_x(L,t)=0, t>0, \\ u_{tt}(L,t)+u_t(L,t)-u_{xxx}(L,t)+M\left(\|u_x\|^2\right)u_x(L,t)=f\left(u(L,t)\right), \end{cases}$$

và điều kiện đầu

$$u(x,0)=u_0(x), u_t(x,0)=u_1(x), 0<x<L,$$

với $f(s)=|s|^{p-2}s, M(s)=1+s^m, p>2, m\geq 1$ là các hằng số dương và $\|u_x\|^2=\int_0^L u_x^2(x,t)dx$. Dựa vào bất đẳng thức Nakao, kết hợp với các xây dựng một tập ổn định, tác giả thu được đánh giá tắt dần của năng lượng, hơn nữa tác giả cũng tìm một điều kiện đủ về dữ liệu ban đầu để nghiệm tắt dần. Tính chất bùng nổ của nghiệm với năng lượng ban đầu dương đủ nhỏ và năng lượng đầu âm thu được nhờ sử dụng bổ đề hàm lồi. Các công trình nghiên cứu điều kiện biên động của phương trình sóng Kirchhoff có thể nêu như: Park và cộng sự [3], Larkin & Doronin [4], Gerbi & Said-Houari [5], Autuori & Pucci [6]. Ngoài ra phương trình sóng chứa số hạng nguồn phi tuyến có dạng

$$u_{tt}+\alpha\Delta^2 u-M\left(\|\nabla u\|^2\right)\Delta u+g(u_t)=f(u), \tag{1.3}$$

cũng nhận được nhiều sự quan tâm, khi nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm, đánh giá tính tắt dần của nghiệm toàn cục và tính bùng nổ của nghiệm với một số điều kiện thích hợp như Wu và Tsai [7]. Santos và cộng sự [8] khảo sát sự tồn tại và tính tắt dần mũ của hệ Kirchhoff với điều kiện biên phi địa phương. Guedda và Labani [9] đã đưa ra một điều kiện đủ để nghiệm của phương trình (1.3) bùng nổ với $g(u_t)=u_t$ với điều kiện biên động. Trong nghiên cứu Long và Thuyết đã chứng minh được sự tồn tại và duy nhất nghiệm toàn cục trong trường hợp hàm M nhận giá trị không âm [10].

Yang & Wang đã chứng minh được sự tồn tại nghiệm toàn cục của bài toán dạng Kirchhoff [11]

$$\begin{cases} u_{tt}-M\left(\|\nabla u\|^2\right)\Delta u-\Delta u_t+h(u_t)+g(u)=f(x), \text{trong } \Omega\times\mathbb{R}_+ \\ u\big|_{\partial\Omega}=0, t>0, \\ u(x,0)=u_0(x), u_t(x,0)=u_1(x), x\in\Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

Le Thi Phuong Ngoc và cộng sự đã nghiên cứu bài toán biên giá trị đầu [12]

$$u_{tt}-\Delta u+Ku+\lambda u_t=a|u|^{p-2}u+f(x,t), x\in\Omega,\ t>0$$

điều kiện biên phi địa phương

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t)=g(x,t)+\int_{\Omega}h(x,y,t)u(y,t)\,dy,\ x\in\partial\Omega,\ t>0,$$

và điều kiện đầu

$$u(x,0)=u_0(x),u_t(x,0)=u_1(x),$$

với Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N$ với $\partial\Omega$ là biên trơn, ν là vector đơn vị hướng ra ngoài biên $\partial\Omega$, $a=\pm1, K, \lambda, p$ là các hằng số cho trước, và u_0, u_1, f, g, h là các hàm cho trước. Trong trường hợp $a=1$, các tác giả đã sử dụng phương pháp xấp xỉ Faedo-Galerkin để chứng minh sự tồn tại nghiệm mạnh và các lý luận trù mật cho sự tồn tại nghiệm yếu. Với $a=1,\ g=0,\ K>0,\ \lambda>0$, và $2<p\le\frac{2N-2}{N-2}, N\ge3$ cùng một số điều kiện của dữ kiện đầu, điều kiện các hàm f, h thích hợp các tác giả đã chứng minh được nghiệm tắt dần mũ bằng cách thiết lập một phiếm hàm Lyapunov thích hợp.

Tính tắt dần và bùng nổ của các phương trình sóng phi tuyến liên kết với các loại điều kiện biên khác nhau, như biên phi địa phương, biên phi tuyến hay điều kiện biên nhiều điểm cũng được nghiên cứu. Trong nghiên cứu của Le Thi Phuong Ngoc và cộng sự đã xét bài toán

$$u_{tt}-u_{xx}+u+\lambda u_t=a|u|^{p-2}u+f(x,t),\ 0<x<1,\ t>0$$

với điều kiện biên phi địa phương

$$\begin{cases} u_x(0,t)=g_0(t)-\int_0^t H_0(t-s)u(0,s)\,ds+\int_0^1 k_0(x,t)u(x,t)\,dx,\\ -u_x(1,t)=g_1(t)-\int_0^t H_1(t-s)u(1,s)\,ds+\int_0^1 k_1(x,t)u(x,t)\,dx,\end{cases}$$

và điều kiện đầu

$$u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x),$$

với $|a|=1,\ \lambda>0$, $p>2$ là các hằng số cho trước. Các hàm $f,\ g_i,\ H_i,\ k_i\ (i=0,1)$ là các hàm số cho trước mà điều kiện của nó sẽ chỉ ra sau [13]. Các tác giả đã chứng minh được hai kết quả về sự tồn tại nghiệm bài toán bằng phương pháp Galerkin và cá lý luận trù mật. Trong trường hợp $a=1,\ \lambda>0,\ p>2,\ g_i=0$, bằng cách xây dựng một phiếm hàm Lyapunov thích hợp, nếu $\|u_0\|_{H^1}^2-\|u_0\|_{L^p}^p+p\sum_{i=0}^{1}\langle k_i(0),u_0\rangle u_0(i)>0$ cùng năng lượng ban đầu, các hàm $f,\ k_i,\ H_i$ đủ nhỏ thì năng lượng của nghiệm sẽ tắt dần mũ khi $t\to\infty$. Tuy nhiên trong trường hợp $a=1,$ thì bài toán có duy nhất nghiệm toàn cục có năng lượng tắt dần mũ khi $t\to\infty$ mà không cần dữ liệu ban đầu (u_0,u_1) đủ nhỏ.

Từ các kết quả trên, trong bài báo này, chúng tôi sẽ trình bày kết quả tắt dần mũ nghiệm của Bài toán (1.1) dưới một số điều kiện của các dữ kiện đầu và các điều kiện phụ khác. Bài báo chia làm các phần như sau.

Trước tiên, chúng tôi sẽ giới thiệu một số ký hiệu, định nghĩa và các không gian hàm cùng các bổ đề cần thiết trong Phần 2. Tiếp theo, chúng tôi sẽ phát biểu định lý về sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu của Bài toán (1.1) trong Phần 3. Cuối cùng, trong Phần 4, bằng cách thiết lập phiếm hàm Lyapunov thích hợp, chúng tôi thu được năng lượng của nghiệm tắt dần theo hàm mũ khi thời gian tiến về vô cùng.

2. CÔNG CỤ

Đặt $\Omega=(\rho,1),\ Q_T=\Omega\times(0,T),\ T>0$. Chúng ta bỏ qua các định nghĩa của các không gian hàm thông thường và ký hiệu chúng bằng bởi các ký hiệu $L^p=L^p(\Omega), H^m=H^m(\Omega)$. Ký hiệu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ là tích vô hướng trong L^2 hoặc cặp tích đối ngẫu của một phiếm hàm tuyến tính liên tục với một phần tử của không gian hàm. Ký hiệu $\|\bullet\|$ chỉ chuẩn trong L^2 và $\|\bullet\|_X$ là chuẩn trong không gian Banach X. Ta gọi X' là không gian đối ngẫu của X. Ta ký hiệu $L^p(0,T;X), 1\le p\le+\infty$ là không gian Banach các hàm thực $u:(0,T)\to X$ đo được, sao cho $\|u\|_{L^p(0,T;X)}<+\infty$, với

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)}=\begin{cases}\left(\int_0^T\|u(t)\|_X^p\,dt\right)^{1/p}, & 1\le p<+\infty,\\ \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\|u(t)\|_X, & p=+\infty.\end{cases}$$

Ta viết $u(t),\ u'(t)=u_t(t)=\dot u(t),\ u''(t)=u_{tt}(t)=\ddot u(t),\ u_x(t)=\nabla u(t),\ u_{xx}(t)=\Delta u(t)$ lần lượt thay cho $u(x,t),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t),\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t),\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,t),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$ Với $f\in C^1([\rho,1]\times\mathbb{R}_+),\ f=f(x,t)$, ta đặt $D_1 f=\frac{\partial f}{\partial x},\ D_2 f=\frac{\partial f}{\partial t}$.

Trên $H^1,\ H^2$ ta sẽ dùng các chuẩn tương ứng sau đây

$$\begin{aligned}\|v\|_{H^1}&=\left(\|v\|^2+\|v_x\|^2\right)^{1/2},\\ \|v\|_{H^2}&=\left(\|v\|^2+\|v_x\|^2+\|v_{xx}\|^2\right)^{1/2}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Ta chú ý rằng $L^2,\ H^1,\ H^2$ là các không gian Hilbert với các tích vô hướng tương ứng

$$\begin{aligned}&\langle u,v\rangle=\int_\rho^1 xu(x)v(x)\,dx,\\ &\langle u,v\rangle+\langle u_x,v_x\rangle,\langle u,v\rangle+\langle u_x,v_x\rangle+\langle u_{xx},v_{xx}\rangle.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Chuẩn trong $L^2,\ H^1,\ H^2$ được sinh ra bởi các tích vô hướng ở (2.1) và (2.2) được ký hiệu lần lượt bởi $\|\cdot\|_0,\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2$.

Ta có các bổ đề sau đây.

Bổ đề 2.1. Ta có các bất đẳng thức sau

(i) $\sqrt{\rho}\,\|v\|\le\|v\|_0\le\|v\|$ với mọi $v\in L^2$,

(ii) $\sqrt{\rho}\,\|v\|_{H^1}\le\|v\|_1\le\|v\|_{H^1}$ với mọi $v\in H^1$.

Bổ đề 2.2. Phép nhúng $H_0^1(\Omega)$ vào $C^0(\overline{\Omega})$ là compact và với mọi $v\in H_0^1$, ta có

(i) $\|v\|_{C^0(\overline{\Omega})}\le\sqrt{1-\rho}\,\|v_x\|$,

(ii) $\|v\| \leq \frac{1-\rho}{\sqrt{2}} \|v_x\|,$

(iii) $\|v\|_0 \leq \frac{1-\rho}{\sqrt{2\rho}} \|v_x\|_0 .$

Hơn nữa, trên $H_0^1(\Omega)$ các chuẩn sau là tương đương $v \mapsto \|v\|_{H^1}, v \mapsto \|v\|_1, v \mapsto \|v_x\|, v \mapsto \|v_x\|_0$.

Ta định nghĩa dạng song tuyến tính

$$a(u,v) = \int_\rho^1 x u_x(x) v_x(x)\, dx,\ \forall u,v \in H_0^1. \tag{2.3}$$

Bổ đề 2.3. Dạng song tuyến tính đối xứng $a(u,v)$ xác định ở (2.3) là liên tục trên $H_0^1 \times H_0^1$ và cưỡng bức trên H_0^1, nghĩa là

(i) $|a(u,v)| \leq \|u_x\|_0 \|v_x\|_0,$

(ii) $a(u,v) \geq \|v_x\|_0^2,$

với mọi $u,v \in H_0^1.$

3. SỰ TỒN TẠI DUY NHẤT NGHIỆM YẾU ĐỊA PHƯƠNG

Ta định nghĩa nghiệm yếu của bài toán (1.1) là hàm $u \in L^\infty(0,T;H_0^1 \cap H^2)$ sao cho $u' \in L^\infty(0,T;H_0^1),\ u'' \in L^\infty(0,T;L^2)$ và thỏa bài toán biến phân và điều kiện đầu sau

$$\begin{cases} \langle u''(t), w\rangle + b[u](t)\, a(u(t),w) + \lambda \langle u_t(t), w\rangle \\ \qquad = \langle u^3(t), w\rangle + \langle f(t), w\rangle, \forall w \in H_0^1, \\ u(0) = u_0, u'(0) = u_1, \end{cases} \tag{3.1}$$

trong đó

$$b[u](t) = 1 + \|\nabla u(t)\|_0^2 = 1 + \int_\rho^1 x u_x^2(x,t)\, dx. \tag{3.2}$$

Với $\lambda > 0,$ ta thành lập các giả thiết sau:

(H_1) $u_0 \in H^2 \cap H_0^1;$

(H_2) $f \in C^0([\rho,1] \times \mathbb{R}^+), D_1 f \in C^0([\rho,1] \times \mathbb{R}^+)$ và $f(\rho,t) = f(1,t) = 0\ \forall t \geq 0.$

Với mỗi M>0 cho trước và $T \in (0,T^*]$, ta đặt

$$\begin{cases} W(M,T) = \{v \in L^\infty(0,T;H^2 \cap H_0^1) : v' \in L^\infty(0,T;H_0^1), v'' \in L^2(Q_T), \\ \max\left\{\|v\|_{L^\infty(0,T;H^2 \cap H_0^1)}, \|v'\|_{L^\infty(0,T;H_0^1)}, \|v''\|_{L^2(Q_T)}\right\} \leq M\}, \\ W_1(M,T) = \left\{v \in W(M,T) : v'' \in L^\infty(0,T;L^2)\right\}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Ta xây dựng dãy xấp xỉ tuyến tính $\{u_m\}$ như sau:

Trước tiên, ta chọn số hạng ban đầu $u_0 \equiv 0$ và giả sử rằng

$$u_{m-1} \in W_1(M,T). \tag{3.4}$$

Ta tìm $u_m \in W_1(M,T)$ là nghiệm của bài toán biến phân liên kết với bài toán (1.1) như sau

$$\begin{cases} \langle u_m''(t),v\rangle + b_m(t)\langle u_m(t),v\rangle + \lambda\langle u_m'(t),v\rangle \\ \qquad\qquad = \langle u_{m-1}^3(t),v\rangle + \langle f(t),v\rangle, \forall v \in H_0^1, \\ u_m(0) = u_0, u_m'(0) = u_1, \end{cases} \tag{3.5}$$

trong đó

$$b_m(t) \equiv b[u_{m-1}](t) = 1 + \| \nabla u_{m-1}(t) \|_0^2. \tag{3.6}$$

Khi đó, ta có các định lý sau đây.

Định lý 3.1. *Giả sử $(H_1)-(H_2)$ đúng. Khi đó, tồn tại các hằng số M, T>0 sao cho, với $u_0 \equiv 0$, tồn tại một dãy quy nạp tuyến tính $\{u_m\} \subset W_1(M,T)$ được xác định bởi (3.4)-(3.6).*

Định lý 3.2. *Giả sử $(H_1)-(H_2)$ đúng. Khi đó, tồn tại các hằng số M, T>0 được chọn như trong Định lý 3.1, sao cho:*

(i) Bài toán (1.1) có một nghiệm yếu duy nhất $u \in W_1(M,T)$;

(ii) Dãy quy nạp tuyến tính $\{u_m\}$ xác định (3.4)-(3.6) hội tụ mạnh về u trong không gian hàm $W_1(T) = \{v \in L^\infty(0,T;H_0^1) : v' \in L^\infty(0,T;L^2)\}$.

Hơn nữa, ta có đánh giá

$$\| u_m - u \|_{W_1(T)} \le C_T k_T^m, \ \forall m \in \mathbb{N},$$

trong đó hằng số $k_T \in [0,1)$ và C_T là một hằng số độc lập với m.

Chứng minh. Chứng minh của hai Định lý 3.1, 3.2, nhờ vào phương pháp xấp xỉ Faedo-Galerkin [14], kết hợp với nguyên lý điểm bất động Banach. Sau đó thực hiện các đánh giá tiên nghiệm phù hợp và các lý luận về tính compact để qua giới hạn. Chứng minh chi tiết tương tự như trong [15] và [16].

4. TÍNH TẮT DẦN MŨ CỦA NGHIỆM YẾU

Bây giờ, chúng ta sẽ chứng minh rằng nếu $\left(1+\frac{1}{2}\| \nabla u_0 \|_0^2\right)\| \nabla u_0 \|_0^2 - \frac{p}{4}\int_\rho^1 x u_0^4(x)dx > 0$ với p>4 và nếu $\| f(t) \|_0$ là đủ nhỏ, thì năng lượng của nghiệm sẽ tắt dần mũ khi t→+∞.

Ta đặt giả thiết của hàm *f* như sau:

(H_2^*) $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+;H_0^1) \cap L^1(\mathbb{R}_+;L^2)$, sao cho tồn tại hai số dương C_0 và γ_0 thỏa $\| f(t) \|_0 \le C_0 e^{-\gamma_0 t}$ $\forall t \ge 0$.

Trước tiên ta xây dựng phiếm hàm Lyapunov

$$L(t)=E(t)+\delta\Psi(t), \tag{4.1}$$

với $\delta>0$ sẽ được chọn sau và

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\|u'(t)\|_0^2+\frac{1}{2}\left[(g*u')(t)+\left(1+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_0^2\right)\|\nabla u(t)\|_0^2\right] \\ &\quad -\frac{1}{4}\int_\rho^1 xu^4(x,t)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\|u'(t)\|_0^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\left[(g*u')(t)+\left(1+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_0^2\right)\|\nabla u(t)\|_0^2\right] \\ &\quad +\frac{1}{p}I(t), \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\Psi(t)=\langle u'(t),u(t)\rangle+\frac{\lambda}{2}\|u(t)\|_0^2, \tag{4.3}$$

với

$$\begin{aligned} I(t)=I(u(t)) &= (g*u')(t)+\left(1+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_0^2\right)\|\nabla u(t)\|_0^2 \\ &\quad -\frac{p}{4}\int_\rho^1 xu^4(x,t)\,dx, \end{aligned} \tag{4.4}$$

và

$$(g*u')(t)=\int_0^t g(t-s)\|u'(s)\|_0^2\,ds,\ g(t)=2\bar{\lambda}e^{-2\bar{k}t}, \tag{4.5}$$

với $0<\bar{\lambda}<\lambda, \bar{k}>0$ là hai hằng số sẽ được chọn sau.

Ta có các bổ đề sau

Bổ đề 4.1. *Phiếm hàm năng lượng E(t) được định nghĩa ở (4.2) thỏa*

(i) $E'(t)\le\frac{1}{2}\|f(t)\|_0+\frac{1}{2}\|f(t)\|_0\|u'(t)\|_0^2,$

(ii) $E'(t)\le-\left(\lambda-\bar{\lambda}-\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\|u'(t)\|_0^2-2\bar{k}(g*u')(t)+\frac{1}{2\varepsilon_1}\|f(t)\|_0^2,$

với mọi $\varepsilon_1>0.$

Chứng minh Bổ đề 4.1. Nhân (1.1) với $xu'(x,t)$ và lấy tích phân trên $[\rho,1]$, ta có

$$E'(t)=-(\lambda-\bar{\lambda})\|u'(t)\|_0^2-2\bar{k}(g*u')(t)+\langle f(t),u'(t)\rangle. \tag{4.6}$$

Mặt khác

$$\langle f(t),u'(t)\rangle\le\frac{1}{2}\|f(t)\|_0+\frac{1}{2}\|f(t)\|_0\|u'(t)\|_0^2. \tag{4.7}$$

Từ (4.6) và (4.7), ta dễ dàng thấy $(4.5)_1$.

Tương tự

$$\left\langle f(t),u'(t)\right\rangle \le \frac{1}{2\varepsilon_1}\| f(t)\|_0^2+\frac{\varepsilon_1}{2}\| u'(t)\|_0^2,\ \forall \varepsilon_1>0.$$

Từ (4.6) và (4.8), ta dễ dàng thấy $(4.5)_{ii}$.

Bổ đề 4.1 được chứng minh hoàn tất. □

Bổ đề 4.2. *Giả sử* $\left(H_2^*\right)$ *thỏa, nếu* $I(0)>0$ *và năng lượng đầu E(0) thỏa*

$$\eta^*=1-\frac{p}{4}\left(\frac{1-\rho}{\rho}\right)^2 R_*^2>0, \tag{4.9}$$

với

$$R_*=\sqrt{\frac{2p}{p-2}E_*},\ E_*=\left(E(0)+\frac{1}{2}\rho^*\right)e^{\rho^*},$$

$$\rho^*=\| f\|_{L^1\left(\mathbb{R}_+;L^2\right)}=\int_0^{+\infty}\| f(t)\|_0\,dt,$$

thì I(t)>0 ∀t≥0.

Chứng minh Bổ đề 4.2. Do tính liên tục của $I(t)$ và $I(0)>0$ nên tồn tại $T_1>0$ sao cho

$$I(t)=I(u(t))>0,\forall t\in\left[0,T_1\right], \tag{4.10}$$

suy ra

$$\begin{aligned} E(t) &\ge \frac{1}{2}\| u'(t)\|_0^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\left[(g*u')(t)+\left(1+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_0^2\right)\|\nabla u(t)\|_0^2\right] \\ &\ge \frac{1}{2}\| u'(t)\|_0^2+\frac{p-2}{2p}\left[(g*u')(t)+\|\nabla u(t)\|_0^2\right],\forall t\in\left[0,T_1\right]. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Kết hợp $(4.5)_i$, (4.11) và sử dụng bất đẳng thức Gronwall thu được

$$\|\nabla u(t)\|_0^2\le \frac{2p}{p-2}E(t)\le \frac{2p}{p-2}E_*\equiv R_*^2,\ \forall t\in\left[0,T_1\right]. \tag{4.12}$$

với E_* được xác định ở (4.9).

Khi đó từ (4.12), ta có

$$\begin{aligned} \frac{p}{4}\int_\rho^1 xu^4(x,t)\,dx &\le \frac{p}{4}\int_\rho^1 x\left(\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}\|\nabla u(t)\|_0\right)^4 dx \\ &\le \frac{p}{4}\left(\frac{1-\rho}{\rho}\right)^2\|\nabla u(t)\|_0^4 \\ &\le \frac{p}{4}\left(\frac{1-\rho}{\rho}\right)^2 R_*^2\|\nabla u(t)\|_0^2 . \end{aligned} \tag{4.13}$$

Do đó

$$I(t) \geq (g * u')(t) + \eta^* \| \nabla u(t) \|_0^2 \geq 0, \ \forall t \in [0, T_1], \tag{4.14}$$

với η^* được xác định ở (4.9).

Ta đặt $T_\infty = \sup\{T > 0 : I(t) > 0, \forall t \in [0, T]\}$. Ta chứng minh rằng $T_\infty = \infty$.

Thật vậy giả sử $T_\infty < \infty$, thì bởi tính liên tục của $I(t)$, ta có $I(T_\infty) \geq 0$.

(i) Nếu $I(T_\infty) > 0$, lý luận tương tự như trên, ta có thể suy ra tồn tại $T_{\infty} > T_\infty$ sao cho $I(t) > 0, \ \forall t \in [0, T_{\infty}]$. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của T_∞.

(ii) Nếu $I(T_\infty) = 0$, từ (4.15) ta có

$$(g * u')(T_\infty) + \eta^* \| \nabla u(T_\infty) \|_0^2 = 0. \tag{4.16}$$

Điều này dẫn tới

$$\begin{aligned} &(g * u')(T_\infty) = \int_0^{T_\infty} g(T_\infty - s) \| u'(s) \|_0^2 \, ds = 0, \\ &u(T_\infty) = 0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Do các hàm $s \mapsto g(T_\infty - s), \ s \mapsto g(T_\infty - s) \| u'(s) \|_0^2$ là liên tục, không âm trên $[0, T_\infty]$ và $g(T_\infty - s) = 2\bar{\lambda} e^{-2\bar{k}(T_\infty - s)} > 0$, $\forall s \in [0, T_\infty]$, do đó từ $\int_0^{T_\infty} g(T_\infty - s) \| u'(s) \|_0^2 \, ds = 0$, ta suy ra $u'(s) = 0, \ \forall s \in [0, T_\infty]$, do đó u là hàm tăng trên $[0, T_\infty]$. Vậy $u(0) = u(T_\infty) = 0$.

Điều này dẫn tới rằng $I(0) = 0$. Điều này mâu thuẫn với $I(0) > 0$.

Vậy $T_\infty = \infty$, tức là ta có được $I(t) > 0, \ \forall t \geq 0$.

Bổ đề 4.2 được chứng minh hoàn tất. □

Bổ đề 4.3. *Giả sử (H_2^*) thỏa, nếu $I(0) > 0$ và (4.9) thỏa. Đặt*

$$E_1(t) = \| u'(t) \|_0^2 + (g * u')(t) + \left(1 + \frac{1}{2} \| \nabla u(t) \|_0^2\right) \| \nabla u(t) \|_0^2 + I(t). \tag{4.18}$$

Khi đó, tồn tại các số dương $\bar{\beta}_1, \ \bar{\beta}_2$ sao cho

$$\bar{\beta}_1 E_1(t) \leq L(t) \leq \bar{\beta}_2 E_1(t), \ \forall t \geq 0, \tag{4.19}$$

với $\delta > 0$ đủ nhỏ.

Chứng minh Bổ đề 4.3. Dễ dàng thấy rằng

$$\begin{aligned} L(t) = &\frac{1}{2} \| u'(t) \|_0^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left[(g * u')(t) + \left(1 + \frac{1}{2} \| \nabla u(t) \|_0^2\right) \| \nabla u(t) \|_0^2\right] \\ &+ \frac{1}{p} I(t) + \delta \langle u'(t), u(t) \rangle + \frac{\delta \lambda}{2} \| u(t) \|_0^2. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Từ bất đẳng thức

$$\begin{aligned}\delta\left\langle u'(t),u(t)\right\rangle &\le \frac{1}{2}\delta\|u'(t)\|_0^2+\frac{1}{2}\delta\|u(t)\|_0^2\\ &\le \frac{1}{2}\delta\|u'(t)\|_0^2+\frac{(1-\rho)^2}{4\rho}\delta\|\nabla u(t)\|_0^2,\end{aligned}\tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}L(t) \ \ge\ & \frac{1}{2}\|u'(t)\|_0^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\left[(g*u')(t)+\left(1+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_0^2\right)\|\nabla u(t)\|_0^2\right]\\ &+\frac{1}{p}I(t)+\delta\left\langle u'(t),u(t)\right\rangle\\ \ge\ & \frac{1}{2}\|u'(t)\|_0^2+\frac{p-2}{2p}\left[(g*u')(t)+\left(1+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_0^2\right)\|\nabla u(t)\|_0^2\right]\\ &+\frac{1}{p}I(t)-\frac{1}{2}\delta\|u'(t)\|_0^2-\frac{(1-\rho)^2}{4\rho}\delta\|\nabla u(t)\|_0^2\\ \ge\ & \frac{1-\delta}{2}\|u'(t)\|_0^2+\frac{p-2}{2p}\left[(g*u')(t)+\left(1+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_0^2\right)\|\nabla u(t)\|_0^2\right]\\ &+\frac{1}{p}I(t)-\frac{(1-\rho)^2}{4\rho}\delta\left(1+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_0^2\right)\|\nabla u(t)\|_0^2\\ \ge\ & \frac{1-\delta}{2}\|u'(t)\|_0^2+\frac{p-2}{2p}(g*u')(t)\\ &+\left(\frac{p-2}{2p}-\frac{(1-\rho)^2}{4\rho}\delta\right)\left(1+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_0^2\right)\|\nabla u(t)\|_0^2+\frac{1}{p}I(t)\\ \ge\ & \bar{\beta}_1E_1(t),\end{aligned}\tag{4.22}$$

và ta chọn

$$\bar{\beta}_1=\min\left\{\frac{1-\delta}{2},\frac{p-2}{2p},\frac{p-2}{2p}-\frac{(1-\rho)^2}{4\rho}\delta,\frac{1}{p}\right\},\tag{4.23}$$

với δ đủ nhỏ sao cho $0<\delta<\min\left\{1,\dfrac{2\rho(p-2)}{p(1-\rho)^2}\right\}$.

Tương tự, ta có

$$L(t)\ \le\ \frac{1}{2}\|u'(t)\|_0^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\left[(g*u')(t)+\left(1+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_0^2\right)\|\nabla u(t)\|_0^2\right]\tag{4.24}$$

$$+\frac{1}{p}I(t)+\frac{1}{2}\delta\|u'(t)\|_0^2+\frac{(1-\rho)^2}{2\rho}\delta\|\nabla u(t)\|_0^2+\frac{(1-\rho)^2\delta\lambda}{4\rho}\|\nabla u(t)\|_0^2$$

$$\le \frac{1+\delta}{2}\|u'(t)\|_0^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)(g*u')(t)$$

$$+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_0^2\right)\|\nabla u(t)\|_0^2+\frac{1}{p}I(t)$$

$$+\frac{(2+\lambda)(1-\rho)^2}{4\rho}\delta\|\nabla u(t)\|_0^2$$

$$\le \frac{1+\delta}{2}\|u'(t)\|_0^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)(g*u')(t)+\frac{1}{p}I(t)$$

$$+\left(\frac{p-2}{2p}+\frac{\delta(2+\lambda)(1-\rho)^2}{4\rho}\right)\left(1+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_0^2\right)\|\nabla u(t)\|_0^2$$

$$\le \bar{\beta}_2 E_1(t),$$

với $\bar{\beta}_2=\max\left\{\frac{1+\delta}{2},\frac{p-2}{2p}+\frac{\delta(2+\lambda)(1-\rho)^2}{4\rho},\frac{1}{p}\right\}.$

Bổ đề 4.3 được chứng minh hoàn tất. □

Bổ đề 4.4. *Giả sử* (H_2^*) *thỏa, nếu* $I(0)>0$ *và (4.9) thỏa. Khi đó phiếm hàm* $\Psi(t)$ *được định nghĩa như (4.9) thỏa*

$$\Psi'(t)\le \|u'(t)\|_0^2-\frac{4}{p}I(t)+\frac{4}{p}(g*u')(t)+\frac{1}{2\varepsilon_2}\|f(t)\|_0^2 \tag{4.25}$$

$$-\left(1-\frac{4}{p}-\frac{\varepsilon_2(1-\rho)^2}{4\rho}\right)\left(1+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_0^2\right)\|\nabla u(t)\|_0^2.$$

với mọi $\varepsilon_2>0$.

Chứng minh Bổ đề 4.4. Nhân (1.1) với $xu(x,t)$ và lấy tích phân trên $[\rho,1]$, ta có

$$\Psi'(t)=\|u'(t)\|_0^2-\left(1+\|\nabla u(t)\|_0^2\right)\|\nabla u(t)\|_0^2+\int_\rho^1 xu^4(x,t)\,dx+\langle f(t),u(t)\rangle. \tag{4.26}$$

Bởi đẳng thức

$$\int_\rho^1 xu^4(x,t)\,dx=\frac{4}{p}\left[(g*u')(t)+\left(1+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_0^2\right)\|\nabla u(t)\|_0^2-I(t)\right], \tag{4.27}$$

nên

$$\Psi'(t)=\|u'(t)\|_0^2-\left(1+\|\nabla u(t)\|_0^2\right)\|\nabla u(t)\|_0^2 \tag{4.28}$$

$$+\int_\rho^1 xu^4(x,t)\,dx+\langle f(t),u(t)\rangle$$

$$\leq \|u'(t)\|_0^2+\frac{4}{p}\left[(g*u')(t)+\left(1+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_0^2\right)\|\nabla u(t)\|_0^2-I(t)\right]$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_0^2\right)\|\nabla u(t)\|_0^2+\frac{1}{2\varepsilon_2}\|f(t)\|_0^2+\frac{\varepsilon_2(1-\rho)^2}{4\rho}\|\nabla u(t)\|_0^2$$

$$\leq \|u'(t)\|_0^2-\frac{4}{p}I(t)+\frac{4}{p}(g*u')(t)+\frac{1}{2\varepsilon_2}\|f(t)\|_0^2$$

$$-\left(1-\frac{4}{p}-\frac{\varepsilon_2(1-\rho)^2}{4\rho}\right)\left(1+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_0^2\right)\|\nabla u(t)\|_0^2.$$

Do đó Bổ đề 4.4 được chứng minh hoàn tất. □

Ta có định lý chính của phần này như sau

Định lý 4.5. *Giả sử* (H_2^*) *thỏa, nếu* $I(0)>0$ *và (4.9) thỏa.* Với $p>4$, khi đó, tồn tại hai hằng số $\bar{C}$ và $\bar{\gamma}$ sao cho

$$\|u'(t)\|_0^2+\|\nabla u(t)\|_0^2\leq \bar{C}e^{-\bar{\gamma}t},\ \forall t\geq 0. \tag{4.29}$$

Chứng minh Định lý 4.5. Từ (4.1), (4.6)$_{\text{ii}}$ và (4.25), ta có

$$L'(t)\ \leq\ -\left(\lambda-\bar{\lambda}-\frac{\varepsilon_1}{2}-\delta\right)\|u'(t)\|_0^2-\frac{4\delta}{p}I(t) \tag{4.30}$$

$$-2\left(\bar{k}-\frac{2\delta}{p}\right)(g*u')(t)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{\delta}{\varepsilon_2}\right)\|f(t)\|_0^2$$

$$-\delta\left(1-\frac{4}{p}-\frac{\varepsilon_2(1-\rho)^2}{4\rho}\right)\left(1+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_0^2\right)\|\nabla u(t)\|_0^2,$$

với mọi δ, ε_1, $\varepsilon_2>0$.

Ta chọn $\delta>0$ đủ nhỏ sao cho

$$\theta_1\equiv\bar{k}-\frac{2\delta}{p}>0,\ 0<\delta<\min\left\{\lambda\text{-}\bar{\lambda},1,\frac{2\rho(\text{p-2})}{\text{p}(1\text{-}\rho)^2}\right\}.$$

Ta chọn $\varepsilon_1>0$ đủ nhỏ sao cho

$$\theta_2\equiv\lambda-\bar{\lambda}-\frac{\varepsilon_1}{2}-\delta>0.$$

Do $p>4$ nên ta có thể chọn $\varepsilon_2>0$ đủ bé sao cho

$$\theta_3 \equiv 1 - \frac{4}{p} - \frac{\varepsilon_2 (1-\rho)^2}{4\rho} > 0. \tag{4.31}$$

Đặt

$$\bar{\beta}_3 = \min\left\{\delta\theta_1, \theta_2, \delta\theta_3, \frac{4\delta}{p}\right\},$$

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{\delta}{\varepsilon_2}\right)C_0,$$

$$0 < \bar{\gamma} < \min\left\{\frac{\bar{\beta}_3}{\bar{\beta}_2}, 2\gamma_0\right\}.$$

Khi đó từ (4.30)-(4.32),

$$L'(t) \le -\bar{\beta}_3 E_1(t) + C_1 e^{-2\gamma_0 s} \le -\frac{\bar{\beta}_3}{\bar{\beta}_2} L(t) + C_1 e^{-2\gamma_0 t} \tag{4.33}$$

$$\le -\bar{\gamma}\mathrm{L}(t) + C_1 e^{-2\gamma_0 t},$$

với $\bar{\beta}_3 = \min\left\{\delta\theta_1, \theta_2, \delta\theta_3, \frac{4\delta}{p}\right\}$, $C_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{\delta}{\varepsilon_2}\right)C_0$, $0 < \bar{\gamma} < \min\left\{\frac{\bar{\beta}_3}{\bar{\beta}_2}, 2\gamma_0\right\}$.

Mặt khác, ta có

$$L(t) \ge \bar{\beta}_1 E_1(t) \ge \bar{\beta}_1 \left(\|u'(t)\|_0^2 + \|\nabla u(t)\|_0^2\right). \tag{4.34}$$

Từ (4.33) và (4.34) ta thu được (4.29).

Chứng minh Định lý 4.5 là hoàn tất. □

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Kirchhoff G. R. - Vorlesungen über Mathematische Physik: Mechanik, Teuber, Leipzig, 1876, Section 29.7.
2. Zhang H., Hou Q. and Hu Q. - Energy decay and blow-up of solution for a Kirchhoff equation with dynamic boundary condition. Boundary Value Problems **2013** (2013) 166.
3. Park J. Y. and Park S. H. - Solution for a hyperbolic system with boundary differential inclusion and nonlinear second-order boundary damping. Electronic Journal of Differential Equations **2003** (80) (2003) 1-7.
4. Doronin G. G. and Larkin N. A. - Global solvability for the quasilinear damped wave equation with nonlinear second-order boundary conditions. Nonlinear Analysis. **50** (2002) 1119-1134.
5. Gerbi S. and Said-Houari B. - Local existence and exponential growth for a semi-linear damped wave equation with dynamical boundary conditions, Advances Differential Equations **13** (2008) 1051-1060.
6. Autuori G. and Pucci P. - Kirchhoff system with dynamic boundary conditions, Nonlinear Analysis **73** (2010) 1952-1965.

7. Wu S. T. and Tsai L. Y. - Existence and nonexistence of global solutions for a nonlinear wave equation. Taiwanese Journal of Mathematics **13B** (6) (2009) 2069-2091.
8. Santos M. L., Rocha M. P. C. and Pereira D. C. - Solvability for a nonlinear coupled system of Kirchhoff type for the beam equations with nonlocal boundary conditions. Electronic Journal Qualitative Theory of Differential Equations **6** (2015) 1-28.
9. Guedda M. and Labani H. - Nonexistence of global solutions to a class of nonlinear wave equations with dynamic boundary conditions. Bulletin of Belgian Mathematics Society **9** (2002) 39-46.
10. Nguyen Thanh Long and Tran Minh Thuyet - On the existence, uniqueness of solution of a nonlinear vibrations equation. Demonstratio Math. **32** (4) (1999) 749-758.
11. Yang Z. and Wang Y. - Global attractor for the Kirchhoff type equation with a strong dissipation. Journal of Differential Equations **249** (2010) 3258-3278.
12. Le Thi Phuong Ngoc, Nguyen Anh Triet and Nguyen Thanh Long - Existence and exponential decay estimates for an N-dimensional nonlinear wave equation with a nonlocal boundary condition. Boundary Value Problems **2016**, 2016: 20.
13. Le Thi Phuong Ngoc, Nguyen Anh Triet, Alain Pham Ngoc Dinh, Nguyen Thanh Long - Existence and exponential decay of solutions for a wave equation with integral nonlocal boundary conditions of memory type. Numerical Functional Analysis and Optimization **38** (9) (2017) 1173-1207.
14. Lions J. L. - Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires, Dunod; Gauthier-Villars, Paris, 1969.
15. Le Huu Ky Son, Le Thi Phuong Ngoc and Nguyen Thanh Long - Existence, blow-up and exponential decay estimates for the nonlinear Kirchhoff-Carrier wave equation in an annular with nonhomogeneous Dirichlet conditions. Filomat **33** (17) (2019) 5561-5588.
16. Le Huu Ky Son, Doan Thi Nhu Quynh, Le Thi Phuong Ngoc and Nguyen Anh Triet - A high order iterative scheme associated with a Dirichlet - Robin problem for a nonlinear Carrier equation in the annular membrane. Nonlinear Functional Analysis and Applications **22** (4) (2017) 841-864.

ABSTRACT

EXPONENTIAL DECAY OF WEAK SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE NONLINEAR KIRCHHOFF IN AN ANNULAR MEMBRANE

Le Huu Ky Son[1]*, Doan Thi Nhu Quynh[1], Le Thi Mai Thanh[2]

[1]*Ho Chi Minh City University of Food Industry*

[2]*Nguyen Tat Thanh University*

*Email: sonlhk@hufi.edu.vn

This paper is devoted to the study of the nonlinear Kirchhoff wave equation in an annual associated with homogeneous Dirichlet boundary conditions. At first, by applying the Faedo-Galerkin, we prove existence and uniqueness of the solution of the problem considered. Next, by constructing Lyapunov functional, we establish a sufficient condition such that any global weak solution is general decay as $t \to +\infty$.

Keywords: Nonlinear Kirchhoff wave equation, exponential decay.