MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA NQ-VÀNH

Đào Thị Trang*, Nguyễn Quốc Tiến

Trường Đại học Công Thương Thành phố Hồ Chí Minh

*Email: *trangdt@huit.edu.vn*

Ngày nhận bài: 04/9/2024; Ngày chấp nhận đăng: 28/10/2024

TÓM TẮT

Một vành R được gọi là NQ-vành nếu R thỏa mãn phương trình $QN(R)=N(R)$. Trong bài báo này, chúng tôi nêu một số tính chất căn bản của lớp vành NQ và chỉ ra rằng với R là vành nửa giao hoán thì R là NQ-vành khi và chỉ khi $QN(R)$ là một iđêan linh; nếu R là một NQ-vành thì $R/J(R)$ là vành nửa nguyên tố; nếu R là một NQ-vành và $R/J(R)$ là nửa giao hoán thì $R/J(R)$ là vành tối giản.

Từ khóa: Lũy linh, tựa lũy linh, căn Jacobson, NQ-vành.

1. GIỚI THIỆU

Trong bài báo này, một vành R đã cho là vành kết hợp và có đơn vị. Chúng tôi dùng kí hiệu $U(R)$ là nhóm khả nghịch của R; $J(R)$ là căn Jacobson của R; $N(R)$ là tập các phần tử lũy linh và $N_*(R), N^*(R)$ lần lượt là căn dưới và căn trên của R. Các tính chất cơ bản của các tập trên người đọc có thể xem trong ([1]). Theo ([2]), một phần tử a thuộc R được gọi là tựa lũy linh nếu $1+xa$ khả nghịch với mọi phần tử x của R giao hoán với a. Tập tất cả các phần tử tựa lũy linh của R được ký hiệu là $QN(R)$. Rõ ràng là các phần tử lũy linh và phần tử của căn Jacobson là tựa lũy linh, điều ngược lại nói chung không đúng.

Trong những năm gần đây, nhiều tác giả đã nghiên cứu về các lớp vành có liên quan đến tập các phần tử lũy linh $N(R)$. Chúng ta biết rằng, với R là vành bất kỳ thì luôn có các bao hàm thức cơ bản như sau

$$N_*(R) \subseteq N^*(R) \subseteq J(R),$$
$$N_*(R) \subseteq N^*(R) \subseteq N(R),$$
$$N(R) \subseteq QN(R),\ J(R) \subseteq QN(R).$$

Khi R là vành Artin trái ta có $N_*(R) = N^*(R) = J(R)$ và khi R là vành giao hoán ta có $N_*(R) = N^*(R) = N(R)$. Một vành R thỏa mãn $N_*(R) = N(R)$ được gọi là vành 2-primal; thỏa mãn $N^*(R) = N(R)$ được gọi là vành NI; thỏa mãn $J(R) = N(R)$ được gọi là vành NJ. Ngoài ra, còn một số lớp vành khác cũng được xây dựng một cách tương tự (xem [1]-[3]). Nghiên cứu các lớp vành trên giúp chúng ta sáng tỏ nhiều điều liên quan đến các lớp vành cổ điển nói riêng và lý thuyết cấu trúc vành nói chung. Từ những điều nói trên, chúng tôi định nghĩa lớp vành NQ (hoặc NQ-vành), đó là lớp vành thỏa điều kiện $QN(R) = N(R)$. Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra một số ví dụ và đặc trưng của NQ-vành làm tiền đề cho những nghiên cứu sâu hơn về sau.

2. NỘI DUNG

Ví dụ 2.1. Cho $R = \mathbb{R}[[x]]$ là vành gồm các chuỗi lũy thừa lấy hệ số trong $\mathbb{R}$. Khi đó, R là một miền nguyên và phần tử $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ trong R khả nghịch khi và chỉ khi a_0 khác 0.

Xét phần tử x thuộc R, rõ ràng x không lũy linh, nhưng phần tử $1-sx$ luôn khả nghịch với mọi s thuộc R vì có hệ số hằng là 1. Do đó, x là tựa luỹ linh.

Ví dụ 2.2. Đặt $\mathbb{Z}_{(2)}$ là tập các số hữu tỉ sao cho có mẫu số là số nguyên lẻ. Đặt $R = M_2(\mathbb{Z}_{(2)})$, khi đó ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ là tựa lũy linh nhưng không lũy linh trong R. Thật vậy, mọi ma trận $X \in R$ giao hoán với A có dạng $X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$, và $I - AX = \begin{pmatrix} 1-x-y & -x-y \\ -x-y & 1-x-y \end{pmatrix}$.

Khi đó, $det(I - AX) = 1 - 2(x+y) \neq 0$ trong $\mathbb{Z}_{(2)}$ hay $I - AX \in U(R)$. Vậy A là tựa lũy linh trong *R*. Tuy nhiên, $A^n \neq 0$ với mọi số nguyên dương n nên A không lũy linh.

Định nghĩa 2.3. Một vành R được gọi là *NQ-vành* nếu tập các phần tử lũy linh và tập các phần tử tựa lũy linh bằng nhau, tức là $N(R) = QN(R)$.

Mệnh đề 2.4. *Lớp các QN-vành đóng dưới phép đẳng cấu vành và tích trực tiếp.*

Chứng minh: Gọi $f : R \to S$ là một đẳng cấu vành, và R là một NQ-vành. Ta sẽ chứng minh S cũng là một NQ-vành. Thật vậy, dễ thấy phần tử a lũy linh trong R khi và chỉ khi $f(a)$ lũy linh trong S. Đối với phần tử $a \in QN(R)$ ta có, với mọi $f(x) \in S$ thỏa mãn $f(a)f(x) = f(x)f(a)$, ta được $f(ax) = f(xa)$, do đó $ax = xa$. Vì $a \in QN(R)$, ta thu được $1 - ax$ khả nghịch trong R, bởi vậy $1 - f(a)f(x) = f(1-ax)$ cũng khả nghịch trong *S*, hay $f(a) \in QN(S)$. Vậy lớp các QN-vành đóng dưới phép đẳng cấu vành. Phát biểu cuối của mệnh đề được suy ra từ tính chất $QN(\prod_{i\in I} R_i) = \prod_{i \in I} QN(R_i)$ và $N(\prod_{i\in I} R_i) = \prod_{i\in I} N(R_i)$.

Nhận xét 2.5. Cho R là một vành và S là vành con của *R*. Ta thấy mọi phần tử lũy linh của R trong S cũng là lũy linh trong *S*, hay $N(R) \cap S = N(S)$. Đối với phần tử tựa lũy linh, có phần tử tựa lũy linh trong R nhưng không tựa lũy linh trong S và ngược lại. Do vậy, nói chung vành NQ không đóng dưới vành con. Sau đây, ta thiết lập một điều kiện để vành con của NQ-vành là NQ-vành.

Nhắc lại rằng, một đồng cấu vành $f : S \to R$ được gọi là *địa phương* nếu với mỗi $x \in S$ không khả nghịch trong S thì $f(x)$ không khả nghịch trong *R*. Một vành con S của vành R được gọi là *vành con đóng hữu tỉ* nếu $U(S) = S \cap U(R)$. Điều này tương đương với đơn cấu bao hàm $S \to R$ là một đồng cấu vành địa phương.

Mệnh đề 2.6. *Cho R là một NQ-vành và S là vành con đóng hữu tỉ của R thỏa điều kiện $QN(R) \cap S \supseteq QN(S)$. Khi đó, S là một NQ-vành.*

Chứng minh: Xét $a \in QN(R) \cap S$, nghĩa là $a \in S$ và $1 - ax \in U(R)$ với mọi $x \in R$ thỏa mãn $xa = ax$. Chú ý rằng, với mọi $x \in S$ thỏa $xa = ax$ ta được $1 - ax \in S$ vì S là vành con. Do đó, $1 - ax \in S \cap U(R) = U(S)$ theo giả thiết S là vành con đóng hữu tỉ của *R*. Vậy $a \in QN(S)$. Cùng với điều kiện $QN(R) \cap S \supseteq QN(S)$, ta được $QN(R) \cap S = QN(S)$. Kết hợp với Nhận xét 2.5, ta được S là NQ-vành.

Nhận xét 2.7. Điều kiện $QN(R) \cap S \supseteq QN(S)$ trong Mệnh đề 2.6 trên là không thể bỏ qua. Chúng ta xét ví dụ sau: Đặt $R = M_2(\mathbb{Q}), S = M_2(\mathbb{Z}_{(2)})$, khi đó R là một NQ-vành theo Ví dụ 2.2, và S là vành con của *R*. Phần tử $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ là tựa lũy linh trong $S = M_2(\mathbb{Z}_{(2)})$, nhưng A

không tựa lũy linh trong $R = M_2(\mathbb{Q})$. Thật vậy, lấy ma trận $X = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \in R$. Khi đó, $AX = XA$ và $I - AX = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ không khả nghịch. Vậy A không là tựa lũy linh trong R. Tức là điều kiện $QN(R) \cap S \supseteq QN(S)$ không thỏa. Và S không thể là NQ-vành do A là tựa lũy linh mà không lũy linh trong S.

Hệ quả 2.8. *Cho R là một NQ-vành và e là một phần tử lũy đẳng trong R. Khi đó, vành con eRe cũng là một NQ-vành.*

Chứng minh: Kết quả suy ra từ tính chất $QN(R) \cap eRe = QN(eRe)$ (xem [2], Lemma 3.5).

Nhắc lại rằng, một vành R được gọi là *NI* nếu $N^*(R) = N(R)$, điều này tương đương với tập tất cả các phần tử lũy linh $N(R)$ lập thành một iđêan của R. Một vành R được gọi là *nửa giao hoán* nếu với mọi $a, b \in R, ab = 0$ suy ra $aRb = 0$. Một vành R nửa giao hoán khi và chỉ khi mọi tập linh hóa phải, trái trên R đều là một iđêan (xem [4], [5]). Một vành nửa giao hoán là vành NI (xem [6], [7]).

Định lý 2.9. *Cho R là vành nửa giao hoán. Khi đó, các phát biểu sau đây là tương đương:*

(1) R là một NQ-vành.

(2) $QN(R)$ là một iđêan linh của R.

Chứng minh: $(1) \Rightarrow (2)$. Vì R là vành nửa giao hoán, suy ra R là NI-vành, hay $N(R)$ là một iđêan của R. Mặt khác, vì R là một NQ-vành, $N^*(R) \subseteq J(R) \subseteq QN(R) = N(R) \subseteq N^*(R)$. Do đó ta có $QN(R) = N^*(R)$ là một iđêan linh của R.

$(2) \Rightarrow (1)$. Vì $QN(R)$ là iđêan linh nên $QN(R) \subseteq N(R)$. Điều này suy ra $QN(R) = N(R)$.

Định lý 2.10. *Nếu R là một NQ-vành thì $R/J(R)$ là vành nửa nguyên tố.*

Chứng minh: Lấy $A/J(R)$ là một iđêan của $R/J(R)$, với A là một iđêan của R thỏa mãn $A^2 \leq J(R)$. Vì R là một NQ-vành, ta được $A^2 \subseteq QN(R) = N(R)$. Điều này có nghĩa A là một iđêan linh của R và do đó $A \leq J(R)$. Vậy $R/J(R)$ là vành nửa nguyên tố.

Ta gọi một vành R là *tối giản* nếu R không có phần tử lũy linh khác không.

Định lý 2.11. *Nếu R là một NQ-vành và $R/J(R)$ là vành nửa giao hoán thì $R/J(R)$ là vành tối giản.*

Chứng minh: Đặt $\overline{R} = R/J(R)$. Giả sử $\overline{x}^2 \in \overline{R}$. Vì $R/J(R)$ nửa giao hoán, ta được $\overline{x}\overline{R}\overline{x}\overline{R} = 0$. Điều đó suy ra $xRxR \leq J(R)$. Theo giả thiết R là một NQ-vành, ta được $xRxR \subseteq N(R)$. Từ đó suy ra xR là một iđêan phải linh của R. Như vậy, $xR \leq J(R)$ và do đó $x \in J(R)$.

Định lý 2.12. *Cho R là một vành. Nếu mọi phần tử không khả nghịch của R là lũy linh thì R là một NQ-vành.*

Chứng minh: Theo giả thiết, ta được $R \backslash U(R) = N(R)$. Với mọi a thuộc R mà $a \notin N(R)$, suy ra $a \in U(R)$. Khi đó tồn tại $r \in R$ sao cho $ar = ra = 1$. Điều này suy ra $a \notin QN(R)$. Vậy ta được $QN(R) \subseteq N(R)$, hay $QN(R) = N(R)$.

Nhắc lại, một vành R được gọi là *UU* nếu R thỏa mãn đẳng thức $U(R) = N(R) + 1$. Vành R được gọi là vành *UU yếu* nếu thỏa đẳng thức $U(R) = N(R) \pm 1$.

Mệnh đề 2.13. *Mọi vành UU yếu là NQ-vành.*

Chứng minh: Xét $x \in QN(R)$ và $x \notin N(R).$ Vì $1+x \in U(R) = N(R) \pm 1,$ nên $1+x = q-1$ với $q \in N(R)$ nào đó. Bởi vậy $2+x \in N(R).$ Một cách tương tự, vì $1+x^2 \in U(R)$ ta được $2+x^2 \in N(R).$ Do đó ta có $2+x^2-(2+x) = x^2-x = x(1-x) \in N(R).$ Nhưng $1-x \in U(R)$ với $x \in N(R),$ điều này là mâu thuẫn. Vậy $QN(R) \subseteq N(R).$

Một vành R được gọi là *vành tốt mạnh* nếu mọi phần tử $r \in R$ có thể được biểu diễn thành $r = a+u, a \in N(R), u \in U(R)$ và $au = ua.$

Mệnh đề 2.14. *Mọi vành tốt mạnh là NQ-vành.*

Chứng minh: Lấy $x \in QN(R)$ và $x \neq 0$. Khi đó, $x = a+u$ với $a \in N(R), u \in U(R)$ và $au = ua.$ Điều đó suy ra $a = x-u$. Chú ý rằng $au = ua$, và do đó $xu = ux.$ Từ đó suy ra $a \in U(R)$, bởi vậy $a = 0.$ Do đó, ta được $x = u \in U(R),$ điều này mâu thuẫn. Vậy $QN(R) = 0,$ hay R là một NQ-vành.

Nhắc lại rằng, một vành R được gọi là "*strongly weakly nil-clean*" nếu mọi phần tử của R là tổng hoặc hiệu của một phần tử lũy linh và một phần tử lũy đẳng giao hoán với nhau.

Mệnh đề 2.15. *Mọi vành strongly weakly nil-clean là NQ-vành.*

Chứng minh: Với mỗi $q \in QN(R),$ ta có $q = b+e$ hoặc $q = b-e$ với $be = eb,$ $e^2 = e \in R$ và $b \in R$ là lũy linh. Giả sử $b^n = 0,$ ta được $(e-q)^n = 0$ hoặc $(e+q)^n = 0.$ Chú ý rằng $qe = eq,$ điều này suy ra $e = e^n \in QN(R).$ Vậy ta được $e = 0,$ do đó $q = b$ là lũy linh. Như vậy, R là một NQ-vành.

Bổ đề 2.16. ([8], Lemma 4.1). *Cho R là một vành, I là một iđêan của R sao cho $I \leq J(R).$ Nếu với mọi $\overline{q} \in QN(R/I)$ thì $q \in QN(R).$*

Mệnh đề 2.17. *Cho I là một iđêan của R sao cho $I \leq J(R).$ Nếu R là một NQ-vành thì R/I cũng là một NQ-vành.*

Chứng minh: Lấy $\overline{q} \in QN(R/J(R)).$ Khi đó, ta có $q \in QN(R).$ Vì R là một NQ-vành, ta được $QN(R) = N(R)$ và do đó q là lũy linh.

Nhắc lại rằng, một phần tử a trong vành R được gọi là π*-chính quy trái* nếu dây chuyền $Ra \supseteq Ra^2 \supseteq \cdots$ là dừng, và a được gọi là π*-chính quy phải* nếu dây chuyền $aR \supseteq a^2R \supseteq \cdots$ dừng. Phần tử a được gọi là π*-chính quy mạnh* nếu a vừa cả phải và trái π-chính quy. Một vành R được gọi là π*-chính quy mạnh* nếu tất cả các phần tử của R là π-chính quy mạnh.

Bổ đề 2.18. ([3], Lemma 2.1) *Cho R là một vành và $a \in R.$ Các phát biểu sau đây là tương đương:*

1) a là π-chính quy mạnh;

2) Tồn tại $b \in R$ và một số nguyên $n \geq 1$ sao cho $a^n = a^{n+1}b$ và $ab = ba;$

3) Tồn tại một số nguyên $n \geq 1$ sao cho $a^n = eu = ue$ với $e^2 = e$ và $u \in U(R).$

Mệnh đề 2.19. *Một vành π-chính quy mạnh là QN-vành.*

Chứng minh: Cho R là một vành π-chính quy mạnh. Chúng ta sẽ chỉ ra $QN(R) \subseteq N(R).$ Giả sử $a \in QN(R),$ theo Bổ đề 2.18 tồn tại số nguyên $k \geq 1$ và $x \in R$ sao cho $a^k = a^{k+1}x$ và $ax = xa.$ Vì $a \in QN(R),$ ta được $1-ax$ là khả nghịch trong R. Hơn nữa, ta có $a^k(1-ax) = a^k - a^{k+1}a = 0.$ Do $(1-ax)$ khả nghịch, nên suy ra $a^k = 0.$ Vậy $a \in N(R),$ hay $QN(R) \subseteq N(R).$

Hệ quả 2.20. *Một vành chính quy không chứa phần tử lũy linh khác không là một NQ-vành.*

Ví dụ 2.21. Vành R các ma trận vuông cấp n trên một vành chia là NQ-vành. Thật vậy, R là vành đơn Atin, nên dãy dây chuyền giảm $AR \supseteq A^2R \supseteq \cdots$ là dừng. Theo Bổ đề 2.18 và Mệnh đề 2.19 ta được R là NQ-vành.

Chúng tôi kết thúc bài báo bằng kết quả liên quan đến tính chất vành NQ trên một số vành ma trận đặc biệt.

Cho α là một tự đồng cấu của vành R và n là một số nguyên dương, vành $T_n(R,\alpha)$ được định nghĩa như sau

$$T_n(R,\alpha)=\left\{\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1}\\ 0 & a_0 & \cdots & a_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_0\end{pmatrix} : a_i\in R\right\},$$

với phép cộng theo thành phần và phép nhân định nghĩa bởi:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1}\\ 0 & a_0 & \cdots & a_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1}\\ 0 & b_0 & \cdots & b_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & b_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1}\\ 0 & c_0 & \cdots & c_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & c_0\end{pmatrix}.$$

Với $c_i=a_0\alpha^0(b_i)+a_1\alpha^1(b_{i-1})+\cdots+a_i\alpha^i(b_0), 0\le i\le n-1$. Để đơn giản, chúng ta ký hiệu các phần tử của $T_n(R,\alpha)$ là $(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$. Nếu α là đồng cấu đồng nhất thì $T_n(R,\alpha)$ là vành con của vành ma trận tam giác trên $T_n(R)$. Chúng ta có kết quả sau

Định lý 2.22. Nếu $T_n(R,\alpha)$ là NQ-vành thì R là NQ-vành.

Chứng minh: Đặt

$$I=\left\{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix} : a_{ij}\in R(i\le j)\right\}.$$

Khi đó, ta có thể kiểm tra rằng $I^n=0$ và $T_n(R,\alpha)/I\cong R$. Như vậy, $I\le J(T_n(R,\alpha))$ và theo Mệnh đề 2.17, ta được $T_n(R,\alpha)/I$ là NQ-vành. Vậy R là NQ-vành theo Mệnh đề 2.4.

Cho α là một tự đồng cấu của vành R. Ta ký hiệu $R[x;\alpha]$ cho vành chia các đa thức biến x, hệ số trên R với phép cộng đa thức thông thường và phép nhân được định nghĩa thông qua tác động của α như sau $xr=\alpha(r)x$, với mọi $r\in R$. Khi đó, đồng cấu vành $\varphi: R[x;\alpha]/(x^n)\to T_n(R,\alpha)$ xác định bởi $\varphi\left(a_0+a_1x+\cdots a_{n-1}x^{n-1}+(x^n)\right)=(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$, với $a_i\in R, 0\le i\le n-1$ là một đẳng cấu vành. Bởi vậy $T_n(R,\alpha)\cong R[x;\alpha]/(x^n)$.

Vậy ta có hệ quả sau

Hệ quả 2.23. Cho R là một vành. Nếu $R[x;\alpha]/(x^n)$ là NQ-vành thì R là NQ-vành.

3. KẾT LUẬN

Bài báo đã khảo sát một cách cơ bản các tính chất của lớp vành có tập phần tử lũy linh trùng với tập các phần tử tựa lũy linh. Cụ thể, bài báo đã chỉ ra các ví dụ tồn tại lớp NQ-vành; khảo sát các thuộc tính đóng của lớp vành này qua đẳng cấu vành, tích trực tiếp họ vành và đóng đối với vành con. Bài báo cũng đã chứng minh các mối quan hệ của lớp NQ-vành với các lớp vành khác như là NI-vành, UU-vành, vành π -chính quy mạnh, vành nửa giao hoán… Qua đó làm sáng tỏ hơn nhiều mối quan hệ trong lý thuyết cấu trúc vành, và mở ra những tiềm năng áp dụng các lớp vành này cho các đại số khác, như Đại số Banach chẳng hạn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lam T.Y. - A First Course in Noncommutative Rings. New York, NY, USA: Springer-Verlag, (1991).
2. Ying Z, Chen J. - On quasipolar rings. Algebra Colloq 2012; 19: 683-692.
3. Cui J. and Chen J. - Characterizations of quasipolar rings, Communications in Algebra 41 (2013) 3207–3217.
4. Wei J., Li L. - Nilpotent elements and reduced rings, Turk J Math, 43: 44–62, (2019).
5. Krempa J., Niewieczerzal D. - Rings in which annihilators are ideals and their application to semigroup rings. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci., Math. Astronom, Phys. 25 (1977) 851-856.
6. Shin G. - Prime ideals and sheaf representation of a pseudo symmetric rings, Trans. Amer. Math. Soc. 184, 43–60, (1973).
7. Kim N.K., Lee Y. - Extensions of reversible rings. J. Pure Appl. Algebra 185 (2003) 207-223.
8. Danchev P.V., Javan A., Hasanzadeh O., Moussavi A. - Rings with $u-1$ quasinilpotent for each unit u, J. Algebra Appl., in press.

ABSTRACT

SOME PROPERTIES OF NQ-RINGS

Dao Thi Trang*, Nguyen Quoc Tien

Ho Chi Minh City University of Industry and Trade

*Email: *trangdt@huit.edu.vn*

A ring R is called NQ-ring if R satisfies the equation $QN(R)=N(R)$. In this paper, we give some basic properties of the class of NQ-rings and show that, if R be a semicommutative ring, then R is an NQ-ring iff $QN(R)$ is a nil ideal; if R is an NQ-ring, then $R/J(R)$ is a semiprime ring; if R is a NQ-ring and $R/J(R)$ is semicommutative, then $R/J(R)$ is a reduced ring.

Keywords: Nilpotent, quasinilpotent, Jacobson radical, NQ-rings.